Des jeux infinis et des grands ensembles

JEAN-PAUL DELAHAYE

Des relations inattendues entre les jeux, les systèmes informatiques et la théorie axiomatique des ensembles amènent les grands cardinaux.

Le jeu commence avec un paquet de 20 jetons : chacun des deux joueurs à tour de rôle enlève un, deux, trois ou quatre jetons ; celui qui prend le dernier jeton gagne. Comment bien jouer ? La stratégie gagnante consiste à laisser à l'adversaire un nombre de jetons multiple de 5. Comme celui qui commence a un tel nombre de pions devant lui, il est certain de perdre, si, bien sûr, le second joueur joue correctement, c'est-à-dire applique la stratégie indiquée.

Dans un tel jeu «fini, à information complète, sans partie nulle», une stratégie gagnante existe toujours : une façon de jouer assure à l'un des deux joueurs de gagner quoi que fasse l'autre. Il est, dans le cas des 20 jetons, facile d'établir une stratégie et de l'appliquer et il est également intéressant de savoir que, dans tous les cas, une telle stratégie existe : cela nous encourage à la chercher.

Pour les jeux «finis, à information complète avec parties nulles», comme le jeu d'échecs et le jeu de dames , mais pas le bridge ou le poker où l'information n'est pas parfaite, car on ne sait pas ce que sont les cartes des autres, soit il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs, soit chaque joueur est certain de pouvoir au moins faire nul à chaque partie (si les deux joueurs jouent bien, toutes les parties sont nulles). Pour le jeu d'échecs ou les dames, ces stratégies optimales sont trop complexes pour être calculées effectivement, mais elles existent ; si quelqu'un réussit un jour à les expliciter, alors ce sera la mort de ces jeux, plus sûrement encore que si un ordinateur devient champion du monde.

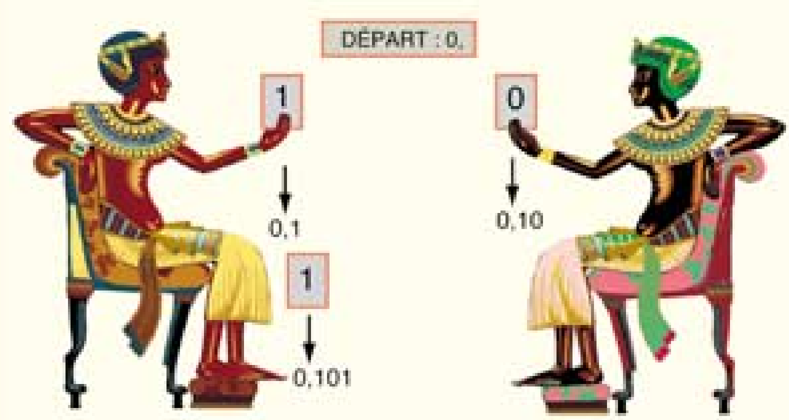
Nous avons examiné des jeux finis, où le nombre de parties possibles est immense : dans le cas des échecs, ce nombre de parties possibles est supérieur au nombre d'électrons dans l'Univers visible. Aussi paradoxal que cela paraisse, la complexité de ces stratégies optimales finies est supérieure à celle des stratégies optimales pour certains jeux infinis. Ces jeux sont au cœur des derniers développements de la théorie des ensembles.

Nous avons tout le temps

Prenons un ensemble A de nombres réels, chacun compris entre 0 et 1. Par exemple : $A = \{0, 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...\}$. Le joueur I choisit un chiffre '0' ou '1' ; imaginons que c'est '1', et que ce joueur commence le développement binaire d'un nombre réel : 0,1. Le joueur II choisit un chiffre '0' ou '1' ; imaginons que c'est '0', et il le juxtapose aux chiffres précédents, ce qui donne : 0,10. Etc.

1. LE JEU DES PHARAONS

L'ensemble A contient tous les nombres inférieurs à 1 dont le développement binaire ne comporte jamais trois 0 ou trois 1 consécutifs. L'ensemble A contient par exemple 2/3 = 0,10101010..., 6/7 = 0,110110110...



Le premier pharaon choisit un chiffre, 0 ou 1, et commence à écrire le développement binaire, 0,1 par exemple. Le second pharaon choisit à son tour un chiffre, 0 ou 1, et le juxtapose : 0,10, et ainsi de suite.
Le but du premier pharaon est que le nombre obtenu à la fin de la partie infinie soit un élément de l'ensemble A. Le but du second pharaon est que ce nombre ne soit pas dans l'ensemble A. Ici le premier pharaon gagne en choisissant toujours l'inverse de ce que vient de jouer le second pharaon.
Lorsqu'il existe une stratégie gagnante pour un des deux joueurs, on dit que le jeu est déterminé et que l'ensemble A est déterminé. L'affirmation que tout ensemble est déterminé est un indécidable de la théorie des ensembles.

Le but du joueur I est que le nombre obtenu en fin de partie (au bout d'un temps infini !) soit un élément de l'ensemble A, et le but du joueur II est que ce nombre ne soit pas un élément de A. Existe-t-il une façon de jouer, pour I ou pour II, qui assure le gain ?

Solution : Le joueur II a une stratégie gagnante. Il joue '1' au début, puis '1' une fois sur deux, et '0' une fois sur deux. Voyons pourquoi il gagne avec cette stratégie. Une petite difficulté initiale ne nous arrêtera pas : il existe deux développements binaires de 1/2 : 0,1000... et 0,01111... (le second développement résulte du fait que la somme de la série 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 +... est égale à 1/2). Similairement, les développements binaires de 1/4 sont 0,01000... et 0,0011111... Dans aucun de ces développements, on ne trouve un '1' suivi plus loin d'un '0', puis plus loin d'un '1' ; donc, dès son troisième coup, le joueur II est certain que le développement obtenu à l'infini sera celui d'un nombre n'appartenant pas à A.

Citons quelques problèmes de jeu infini avec divers ensembles A.

• A = [1/8, 7/8], l'intervalle comprenant tous les nombres réels entre 1/8 et 7/8.

Solution : Le joueur I possède une stratégie gagnante qui est : jouer '1' puis '0', puis n'importe quoi, car tout nombre de la forme 0,1?0???... est compris entre 1/2 et 1/2+1/4+1/8=7/8.

• $A = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, un ensemble fini quelconque fixé de nombres réels.

Solution : Le joueur II a une stratégie gagnante. Elle consiste à se fixer un chiffre de r_1 de rang impair, et à jouer le complémentaire de ce chiffre lorsqu'il y arrive, ce qui «évite» au résultat final d'être r_1 (si r_1 possède deux développements, le joueur II «évite» d'abord le premier, puis le second). Le joueur II évite de même le nombre r_2, puis le nombre r_3, etc. Puisqu'il dispose d'un nombre infini de coups, le joueur II évite ainsi tous les éléments de A les uns après les autres, et il est certain de gagner. Remarquons que cette «méthode d'évitement» s'adapte à tout ensemble infini dénombrable A (un ensemble est infini dénombrable si tous ses éléments peuvent être numérotés par les nombres entiers).

• A = les nombres dont le développement binaire ne comporte jamais trois '0' ou trois '1' consécutifs (jeu des pharaons de l'encadré 1).

Solution : Le joueur I gagne en jouant n'importe quoi au premier coup, et ensuite toujours l'inverse de ce que vient de jouer le joueur II (ce qui assure que jamais trois chiffres consécutifs ne sont identiques, et donc que le nombre obtenu à l'infini est bien dans A).

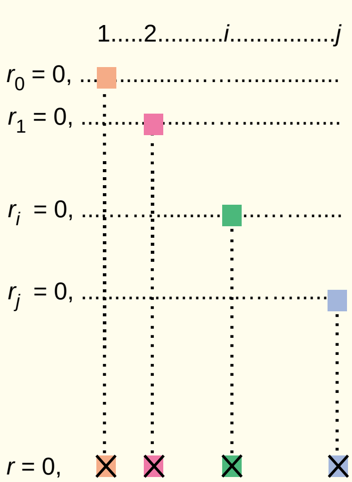
Nous pourrions multiplier les exemples, et nous découvririons que, pour tout ensemble A pas trop compliqué, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le jeu est *déterminé* pour l'ensemble A, ou encore que l'ensemble A est *déterminé*.

2. ENSEMBLE DÉNOMBRABLE, HYPOTHÈSE DU CONTINU

Un ensemble infini est dénombrable s'il peut être mis en correspondance, terme à terme, avec l'ensemble des entiers.
Ainsi l'ensemble *N* de tous les mots qu'on peut écrire avec les deux lettres "a" et "b" est dénombrable :

a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	aab	aba	abb	abb	baa	bab	bbb	aaaa
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

L'ensemble des nombres réels, noté *R*, en revanche, n'est pas dénombrable. On le démontre avec le raisonnement diagonal de Cantor :



Soit une liste de nombres réels $r_0, r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_j, ...$ supposée complète. On définit un nombre réel r qui possède comme décimale numéro i un chiffre différent de la décimale numéro i de r_j. Le nombre réel ainsi construit n'est égal à aucun nombre de la liste $r_0, r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_j, ...$ La liste n'est donc pas complète, et donc l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. On dit qu'un ensemble qui peut être mis en correspondance terme à terme avec l'ensemble des nombres réels a la puissance du continu.
L'hypothèse du continu est l'affirmation que tout sous-ensemble infini de *R* est dénombrable ou a la puissance du continu.

Quelqu'un est-il sûr de gagner?

Les jeux infinis et leurs stratégies gagnantes furent examinés pour la première fois par les mathématiciens polonais S. Mazur et S. Banach dans les années 1930. Ces développements intéressent aujourd'hui les informaticiens, car, à partir de telles études, on modélise les interactions entre un système informatique et ses utilisateurs. Les informaticiens veulent s'assurer que le système informatique ne tombe jamais en panne et que le système répond aux demandes des utilisateurs en ce qui concerne l'accès aux ressources dont il a la charge (imprimante, modem, etc.). Le système informatique joue donc une sorte de partie infinie avec les utilisateurs qui, par maladresse ou malveillance, pourraient interrompre son fonctionnement. Par ailleurs, les utilisateurs ne doivent pas attendre indéfiniment les accès aux ressources qu'ils sollicitent.

Une stratégie gagnante pour le système assure ainsi qu'il n'y aura jamais de panne et que les utilisateurs seront correctement servis, alors qu'une stratégie gagnante pour les utilisateurs est la marque d'un point faible dans la sécurité. Les problèmes de jeux infinis sont concrets, et pourtant ils nous conduiront aux confins de la théorie des ensembles, en un lieu où les objets considérés sont si gros, si «infinis», que leur existence est indécidable !

Le contenu d'un ensemble A étant défini, existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ? Autrement dit, tout ensemble A est-il déterminé ? Si la réponse est non, quels sont les ensembles déterminés ?

La profondeur et la difficulté de ces questions, pourtant de formulation simple, sont inattendues ; on ne sait pas y répondre complètement aujourd'hui, car elles sont liées aux aspects les plus mystérieux de la théorie axiomatique des ensembles et, en particulier, aux axiomes de grands cardinaux et à l'hypothèse du continu.

Tout ensemble est-il déterminé?

Les premiers résultats, dus à D. Gale et F. Stewart, datent de 1953 : ces deux mathématiciens démontrèrent que tout ensemble ouvert *(voir l'encadré 3)* est déterminé. Les deux adversaires jouent comme précédemment, en ajoutant, chacun à leur tour soit 0, soit 1. Avec certains ouverts, comme l'intervalle *A* égal à]0,2/3[(tous les nombres entre 0 et 2/3, à l'exception de 0 et 2/3), c'est le joueur I qui dispose d'une stratégie gagnante ; pour d'autres, comme *A* égal à]1/4, 3/4[, c'est le joueur II qui est assuré de gagner.

D. Gale et F. Stewart démontrèrent aussi que nous ne devons pas croire que tout ensemble est déterminé : cela conduirait à une contradiction avec un axiome de base de la théorie des ensembles, l'axiome du choix. Cet axiome affirme une évidence : si vous avez une famille d'ensembles non vides, vous pouvez construire un nouvel ensemble en choisissant un élément dans chacun des ensembles de la famille. L'axiome du choix a donné lieu à de nombreux débats au début du siècle, mais les théoriciens des ensembles l'acceptent aujourd'hui.

On envisagea un moment d'adopter l'axiome de détermination complète qui affirme que «tout ensemble est déterminé» et de renoncer à l'axiome du choix. Par analogie avec le cas fini, il est naturel de soutenir que tout ensemble est déterminé, c'est-à-dire qu'il existe une stratégie gagnante pour tout ensemble *A*. En 1962, J. Mycielski et H. Steinhaus argumentaient de la façon suivante : «Supposons que les deux joueurs soient infiniment intelligents et qu'ils connaissent parfaitement bien l'ensemble *A*, alors le résultat du jeu ne peut pas dépendre du hasard, et donc l'un des deux doit disposer d'une stratégie gagnante.»

Entre deux énoncés naturels qui se contredisent, ici l'axiome de détermination complète et l'axiome du choix, nous pouvons retenir celui qui nous «arrange» le mieux, et donc l'axiome de détermination complète si nous y trouvons un intérêt.

Cette défense de l'axiome de détermination complète est aujourd'hui jugée peu convaincante, et les mathématiciens préfèrent garder l'axiome du choix, mieux ancré dans l'intuition.

Intéressons-nous aux sous-ensembles des nombres réels *R* et essayons d'identifier ceux qu'il est raisonnable de considérer déterminés. En simplifiant, les sous-ensembles de *R* sont classés en quatre catégories, les ouverts, les boréliens, les projectifs et les ensembles qui ne sont pas projectifs *(voir l'encadré 3)*.

La généralisation de la preuve que «tous les ouverts sont déterminés» à «tous les boréliens sont déterminés» nécessita 20 ans de travail et aboutit en 1975 grâce à Donald Martin. L'étape suivante qui aurait été de montrer que tout ensemble projectif est déterminé, affirmation qui s'appelle *la détermination projective*, ne fut jamais franchie. La démonstration était impossible, comme on le comprit en montrant que les axiomes habituels de la théorie des ensembles, s'ils sont sans contradiction, ne démontreront jamais la détermination projective.

Ainsi, pour certains ensembles, on ne peut savoir si le jeu associé possède une stratégie gagnante. Ce résultat est étonnant, mais l'axiome de détermination projective est tellement tentant qu'on ne souhaitait pas l'abandonner, d'autant qu'il permet une théorie belle et efficace des sous-ensembles de *R*.

Avec l'axiome de détermination complète, certaines démonstrations sont plus directes et plus naturelles que d'autres démonstrations connues. Citons Donald Martin : «Bien que la détermination projective ne puisse être prouvée à partir des axiomes habituels de la théorie des ensembles, elle conduit à une théorie élégante et essentiellement complète des ensembles projectifs, et donc il n'est pas déraisonnable qu'elle soit vraie. Je considère que l'axiome de détermination projective a un statut analogue à une hypothèse en physique : les conséquences de la détermination projective sont si harmonieuses et riches qu'elles constituent une preuve quasi empirique de la détermination projective.» Il devenait donc naturel d'ajouter l'axiome de détermination projective aux autres axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, notée ZFC.

Remarquons l'étrangeté de la situation : les mathématiciens ne réussissant pas à prouver une propriété – ils savent même qu'elle n'est pas prouvable avec les outils habituels –, mais, constatant qu'elle a des conséquences agréables, ils proposent de la considérer vraie. Habituellement les mathématiciens ne proposent que des axiomes vrais *a priori* (évidents par eux-mêmes), ici c'est *a posteriori* (après étude de leurs conséquences) qu'ils jugent la détermination projective vraie et souhaitent la prendre comme axiome.

Une des conséquences agréables de l'insertion de ce nouvel axiome dans la théorie des ensembles est qu'il permet de traiter partiellement l'hypothèse du continu. Pour l'expliquer et montrer l'intérêt de cette recherche de nouveaux axiomes, nous devons donc revenir sur l'hypothèse du continu.

L'hypothèse du continu est-elle vraie?

L'hypothèse du continu – proposée par Cantor en 1878 et qui contribua à le rendre fou – affirme qu'il n'y a que deux sortes de sous-ensembles infinis de l'ensemble *R* des nombres réels : ceux qu'on peut mettre en correspondance terme à terme avec les entiers, et ceux qu'on peut mettre en correspondance terme à terme avec les nombres réels *(voir l'encadré 2)*.

Kurt Gödel et Paul Cohen ont démontré que cette affirmation générale est indépendante des autres axiomes de la théorie des ensembles. K. Gödel montra qu'on n'introduit pas de contradiction en ajoutant l'hypothèse du continu aux axiomes de ZFC, et P. Cohen montra qu'on n'introduit pas de contradiction si on ajoute la négation de l'hypothèse du continu à ZFC. On sait aussi que l'hypothèse du continu n'a aucune conséquence en arithmétique : en conséquence, tout ce qui peut se démontrer sur les entiers avec l'hypothèse du continu se démontre aussi sans l'utiliser.

Il y a parfois un malentendu sur ce que l'on doit conclure des résultats de K. Gödel et de P. Cohen : certains interprètent cette indépendance de l'hypothèse du continu en disant que le mathématicien peut, selon ses goûts, ajouter, aux axiomes usuels des ensembles, l'hypothèse du continu ou sa négation. Cela n'est vrai que si, derrière les ensembles, on considère qu'il n'y a aucune réalité et qu'en mathématiques tout n'est que manipulations symboliques dénuées de sens, ce qui est la position dite formaliste en philosophie des mathématiques (soutenue par P. Cohen, par exemple). Au contraire, si, comme K. Gödel, on pense qu'il y a véritablement un monde des ensembles et que notre but doit être, comme en physique, de comprendre sa réalité et d'en faire la théorie, alors le résultat d'indépendance de l'hypothèse du continu ne signifie pas qu'on a la liberté de choisir arbitrairement ce qui nous plaît le mieux, il signifie qu'il faut chercher à compléter les axiomes de la théorie des ensembles, jusqu'à ce qu'on puisse résoudre la question de l'hypothèse du continu. Pour K. Gödel, nous devons chercher à approfondir notre théorie en lui ajoutant de nouvelles lois, comme nous cherchons toujours de nouvelles lois en physique pour améliorer notre description du monde.

Le formaliste réagit généralement à la doctrine réaliste en demandant : «Mais sur quels critères peut-on juger qu'il est souhaitable d'ajouter tel axiome plutôt que sa négation, sachant que ni l'un ni l'autre ne donneront de contradictions, comme c'est le cas pour l'hypothèse du continu?» Le réaliste répond : «Il faut faire comme d'habitude! Nous devons choisir nos nouveaux axiomes sur leur évidence *a priori*, sur leur fécondité, et, pourquoi pas, sur la simplicité et l'harmonie du monde qu'ils font entrevoir».

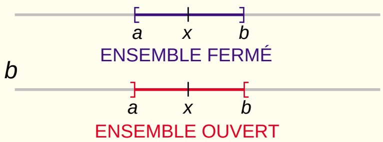
Concernant l'hypothèse du continu, on n'a malheureusement pas d'évidence *a priori* (ni pour ni contre), et les logiciens sont partagés sur ce qui est naturel et harmonieux à son sujet. Les critères *a priori* ne sont donc ici d'aucune aide, semble-t-il, et en tout cas n'entraînent pas l'unanimité.

Pour ce qui est de la fécondité, nous avons vu que l'axiome de détermination projective est très satisfaisant. Son évidence *a priori* laisse cependant à désirer. À la rigueur, on peut défendre l'idée que l'axiome de détermination complète («tous les sous-ensembles de R sont déterminés») est naturel en soi par analogie avec le cas fini, mais il n'y a rien de tel pour l'axiome de détermination projective. Les arguments en faveur de l'axiome de détermination projective sont donc *a posteriori*. Ce n'est pas suffisant pour convaincre un formaliste et n'est pas parfaitement satisfaisant pour un réaliste.

3. ENSEMBLES FERMÉS, OUVERTS, BORÉLIENS, PROJECTIFS

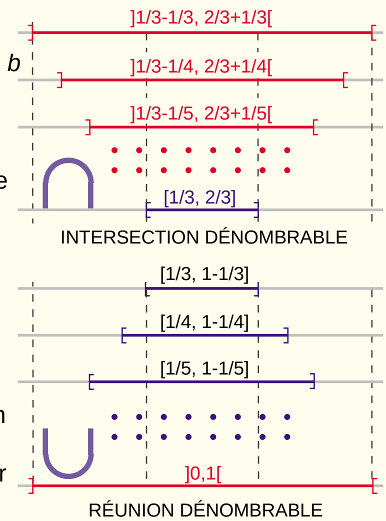
ENSEMBLES FERMÉS

L'intervalle fermé *[a, b]* est l'ensemble de tous les points *x* qui vérifient *a* < *x* < *b* (*a* et *b* sont dans *[a, b]*)



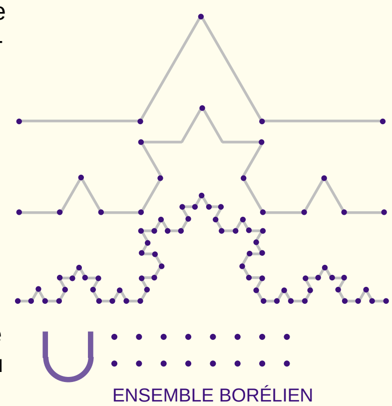
ENSEMBLES OUVERTS

L'intervalle ouvert *]a, b[* est l'ensemble de tous les points *x* qui vérifient *a* < *x* < *b* (*a* et *b* ne sont pas dans *]a, b[*).
Un ensemble ouvert est un ensemble dont aucun point n'est au bord.
L'intersection de la famille dénombrable d'intervalles ouverts]1/3-1/*n*, 2/3+1/*n*[est l'intervalle fermé [1/3, 2/3]
La réunion de la famille dénombrable d'intervalles fermés [1/*n*, 1-1/*n*] est l'intervalle ouvert]0, 1[



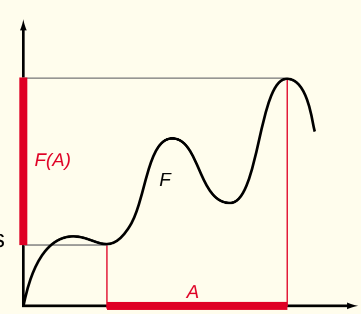
ENSEMBLES BORÉLIENS

Un sous-ensemble de *R* est dit borélien (du nom d'Émile Borel, mathématicien français, 1871-1956) si on peut l'obtenir à partir d'intervalles ouverts, en faisant une ou plusieurs fois (un nombre fini de fois) des opérations de réunion dénombrable ou d'intersection dénombrable.
Ainsi la réunion de tous les sommets de toutes les courbes de von Koch, à l'infini une fractale, est un ensemble borélien qui n'est ni ouvert, ni fermé.
Une grande majorité des sous-ensembles de *R* que l'on étudie en mathématiques élémentaires sont boréliens.
L'hypothèse du continu est vraie pour tous les boréliens : tout sous-ensemble borélien infini de *R* est dénombrable ou a la puissance du continu.



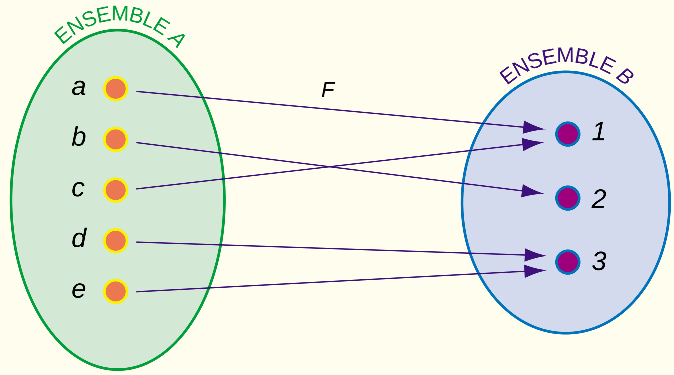
ENSEMBLES PROJECTIFS

F étant une fonction continue, la projection de l'ensemble *A* par la fonction *F* est l'ensemble des points *F(a)*, pour tous les points de l'ensemble *A*.
Un sous-ensemble de *R* est projectif si on peut le construire à partir d'un ensemble borélien par des passages au complémentaire et des projections par des applications continues. Il existe des sous-ensembles de *R* qui ne sont pas projectifs.

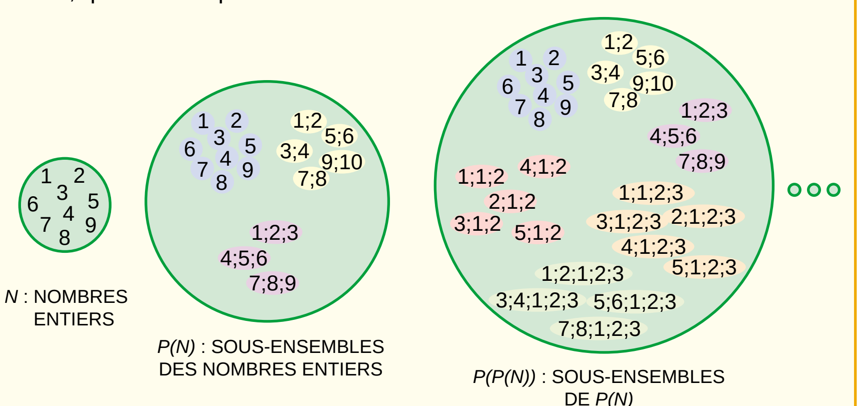


4. UN AXIOME DE GRANDS CARDINAUX

Une surjection de *A* vers *B* est une application *F* qui atteint tout point de *B* : pour tout élément *b* dans l'ensemble *B*, il existe un élément *a* de l'ensemble *A* tel que *F(a) = b*.



S'il existe une surjection de l'ensemble *A* vers l'ensemble *B*, on dit que *A* est plus gros que *B*. Si, de plus, il n'existe pas de surjection de *B* vers *A*, on dit que *A* est strictement plus gros que *B*.
Cantor a montré que l'ensemble *P(A)* des parties d'un ensemble *A* est toujours strictement plus gros que l'ensemble *A*. Il en résulte qu'il existe une infinité d'ensembles de plus en plus gros, *N*, *P(N)*, *P(P(N))*, et, accessoirement, qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.



Voici un exemple d'axiome de grands cardinaux : il existe un ensemble non dénombrable *A* tel que, si *A* est strictement plus gros que *B*, alors *A* est aussi strictement plus gros que l'ensemble *P(B)* des parties de *B*.

Un des grands succès de ces dernières années en logique a été la découverte par H. Woodin, D. Martin et J. Steel, de l'Université de Berkeley, d'un argument d'évidence *a priori* pour l'axiome de détermination projective. L'argument est indirect, mais il vaut la peine d'être compris : il nous amène aux grands cardinaux qui sont au centre des travaux en théorie des ensembles depuis une vingtaine d'années.

Un point semble être certain : si le monde des ensembles existe, il doit être aussi grand que possible. Il serait absurde de considérer que le monde des ensembles s'arrête à tel ou tel niveau, s'il est logiquement possible de le concevoir plus grand : le monde des ensembles, par une sorte de principe de maximisation, doit être aussi grand que le permet la logique.

Il en résulte qu'à chaque fois qu'on trouve un axiome qui affirme qu'il y a de grands ensembles – de tels axiomes s'appellent les axiomes de grands cardinaux *(voir l'encadré 4)* – et que cet axiome n'introduit pas de contradiction, on doit l'adopter : tout axiome de grands cardinaux est valide *a priori*.

Une telle justification peut paraître étrange et risquée, mais elle ne l'est pas plus que celle qu'on utilise pour axiomatiser les entiers quand on déclare qu'après tout nombre entier il y en a un autre. Lorsqu'on recherche de nouveaux axiomes, on est réduit à ce genre de considérations heuristiques, et celles concernant les grands ensembles me semblent parfaitement satisfaisantes (nous allons voir plus loin que les axiomes de grands cardinaux possèdent aussi une justification *a posteriori*).

Comme tout axiome de grands cardinaux est justifié *a priori*, tout ce qui résulte d'un axiome de grands cardinaux est aussi justifié *a priori*. La découverte par H. Woodin, D. Martin et J. Steel, il y a quelques années, que certains axiomes de grands cardinaux impliquaient l'axiome de détermination projective a comblé les espérances des théoriciens qui proposaient d'adopter l'axiome de détermination projective : non seulement nous avons des raisons *a posteriori* d'adopter l'axiome de détermination projective, mais nous avons aussi des raisons *a priori*. Le réaliste est satisfait, et une partie importante des chercheurs en théorie des ensembles considère aujourd'hui l'axiome de détermination projective comme un axiome sérieux qu'il faut accepter d'ajouter à la théorie classique ZFC.

À ce stade, le lecteur attend impatiemment qu'on lui décrive un grand cardinal, ou mieux qu'on lui indique un moyen de le construire. Hélas, ce n'est pas possible : les ensembles que l'on construit "à partir du bas", avec des unions et des intersections d'ensembles d'entiers, d'ensembles de nombres réels ou d'ensembles de fonctions, ne donnent jamais un grand cardinal. Ce n'est pas une raison pour les rejeter, tout comme on ne rejette pas le nombre *pi* parce que l'on ne sait pas en calculer l'ensemble des décimales. L'incidence des grands cardinaux sur la détermination projective montre bien que leur existence n'est pas sans effet sur les mathématiques ordinaires. De même que les très grands entiers, comme $10^{10^{10}}$, sont des abstractions impensables mais indispensables, les grands cardinaux sont eux aussi impensables et indispensables.

Le réalisme marque des points contre le formalisme

Un progrès plus diffus en théorie des ensembles doit être mentionné, progrès qui fournit une raison *a posteriori* d'adopter les axiomes de grands cardinaux.

Notons d'abord qu'il y a une limite évidente à l'acceptation des grands cardinaux que nous n'avons pas mentionnée pour l'instant : leurs compatibilités mutuelles. En effet, si certains énoncés affirmant l'existence de grands ensembles se contredisent, alors il est impossible de les prendre tous, il faut choisir.

Cette idée que deux axiomes de grands cardinaux pourraient se contredire constitue même un critère permettant de départager la conception réaliste de la conception formaliste en philosophie des mathématiques : si des axiomes de grands cardinaux se contredisaient, c'est que les ensembles seraient des fictions (car alors défendre l'idée d'un unique réel, raison de tout, ne tient plus, et l'on retombe dans l'idée que les extensions acceptables de ZFC sont au libre choix du mathématicien) ; en revanche, si l'on n'en trouve pas, il devient raisonnable de croire qu'il y a quelque chose de réel derrière les formalismes.

Les recherches faites sur ces questions dans les 30 dernières années ont abouti à une situation remarquable et inespérée, qui vient renforcer la position des réalistes et fournit en même temps un argument *a posteriori* en faveur de tous les axiomes de grands cardinaux. Malgré des dizaines et des dizaines de théorèmes sur les relations qu'ils entretiennent, on n'a jamais trouvé d'axiomes de grands cardinaux qui soient incompatibles, et au contraire on s'est aperçu qu'ils se classent les uns par rapport aux autres comme si vraiment ils décrivaient une réalité hiérarchisée conforme aux espérances du réaliste. Pour A. Kanamori et M. Magidor, «cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque peu mystérieux, mais est aussi un argument fort en faveur de l'adoption des axiomes de grands cardinaux et du fait qu'ils fournissent les extensions naturelles de ZFC».

Le monde ensembliste apparaît organisé, et il n'y a pas d'arbitraire dans les axiomes qu'on doit ajouter à ZFC pour en rendre compte : ils semblent dictés par des nécessités extérieures qu'on peut assimiler à un réel indépendant. La constatation empirique de cet ordre dans les grands ensembles conforte les arguments *a priori* pour les grands cardinaux.

Notons que nombre d'énoncés (avec une exception majeure, sur laquelle nous reviendrons), indépendants des axiomes habituels de la théorie des ensembles, se sont révélés équivalents à des axiomes de grands cardinaux : aussi tout ce qu'il semble raisonnable d'accepter par des arguments *a posteriori* (comme pour l'axiome de détermination projective) résulte aussi d'hypothèses de grands cardinaux et est, ainsi, justifié *a priori*.

Pour H. Woodin : «La hiérarchie de grands cardinaux semble aussi intrinsèque et absolue que les nombres entiers eux-mêmes. C'est l'une des découvertes majeures en théorie des ensembles depuis 30 ans.»

L'hypothèse du continu, aujourd'hui et demain

Revenons un moment sur l'hypothèse du continu. Peut-on, comme pour l'axiome de détermination projective, la régler complètement d'une façon qu'on pourrait considérer comme naturelle et, par exemple, montrer qu'elle (ou sa négation) résulte d'un axiome de grands cardinaux? Malheureusement non, car un résultat indique qu'on ne pourra pas traiter complètement de l'hypothèse du continu avec un axiome de grands cardinaux.

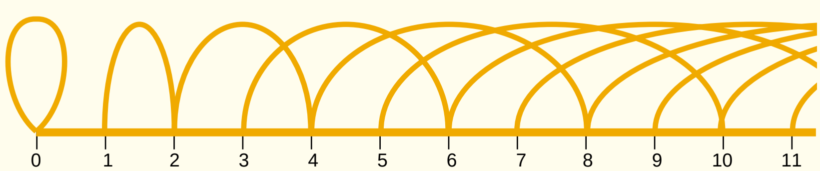
Le sentiment général est qu'avec l'axiome de détermination projective et la belle organisation découverte des axiomes de grands cardinaux, on a cependant progressé sur l'hypothèse du continu. En effet, l'axiome de détermination projective, si on le considère comme adjoint aux autres axiomes, permet de traiter mieux la question de savoir si tous les sous-ensembles de *R* sont dénombrables ou ont la puissance du continu (question posée par l'hypothèse du continu). On peut en effet, grâce à l'axiome de détermination projective, conclure que tout ensemble projectif est, soit dénombrable, soit a la puissance du continu. Cette incidence de l'axiome de détermination projective sur l'hypothèse du continu ne règle pas tout, mais crée la conviction qu'on a avancé et qu'on ira encore plus loin par ces méthodes.

On peut, d'une part, imaginer qu'en formulant des axiomes de grands cardinaux encore plus forts, on progressera toujours et encore, pour traiter «asymptotiquement» tous les cas possibles. On peut, d'autre part, tirer la leçon du travail sur l'axiome de détermination projective que, même dans le doute, il est intéressant d'explorer des axiomes non fondés *a priori* et que la méthode de la recherche d'axiomes par arguments *a posteriori* est féconde.

Peut-être qu'en avançant, nous pourrons formuler d'autres axiomes justifiés *a posteriori*, dont certains pourraient résoudre l'hypothèse du continu et aussi identifier plus précisément pour quels jeux infinis il existe des stratégies gagnantes. Pour H. Woodin, «il est devenu raisonnable d'espérer que notre compréhension progresse jusqu'au point où la solution de l'hypothèse du continu sera possible».

5. LES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX SONT AFFAIRE DE FOI

Un ensemble infini est un ensemble tel qu'il existe une injection (une application vérifiant que deux points différents ont toujours deux images différentes) de l'ensemble dans une partie de lui-même. L'application $n \rightarrow 2n$ est une telle injection de l'ensemble des entiers dans une partie de lui-même (les entiers pairs) différente de lui-même.



Un ensemble *E*, tel qu'il existe une injection de *E* dans lui-même, est très grand. Cette idée d'injection est féconde. En imposant aux injections de vérifier des propriétés de plus en plus nombreuses, on définit des infinis de plus en plus sévères, c'est-à-dire des ensembles de plus en plus grands. C'est l'une des méthodes pour définir des axiomes de grands cardinaux.

Les axiomes de grands cardinaux sont considérés comme naturels, car si le monde des ensembles existe, alors il doit contenir le plus possible d'ensembles, et donc tous les grands ensembles y sont les bienvenus.

Cependant ces axiomes, dans la majorité des cas, font partie des indécidables de Gödel de la théorie des ensembles : avec les axiomes habituels, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des autres. C'est une affaire de foi.

Les axiomes des grands cardinaux sont utiles en arithmétique, car ils ont pour conséquence la non-contradiction de la théorie des ensembles. Ils sont aussi utiles pour nourrir l'intuition du mathématicien, et pour classer les indécidables.

Toutefois, la notion de vérité mathématique y vacille au contact d'infinis dépassant l'imagination.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J. BARWISE ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1994.

H. WOODIN, *Large Cardinal Axioms and Independence : The Continuum Problem Revisited*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, pp. 31-35, 1994.

P. DEHORNOY, *Un rôle nouveau pour la théorie des ensembles ?*, Département de mathématiques, Université de Caen, mars 1995.